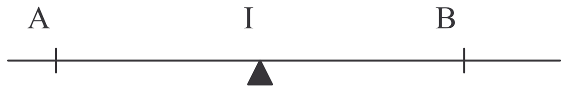
lundi 13 septembre 2004

MATHEMATIQUES

BARYCENTRES

1/ Introduction

- 

Equilibre lorsque 80IA = 40IB

On a aussi :

$80\overrightarrow{IA} = -40\overrightarrow{IB}$

ou

$80\overrightarrow{IA} + 40\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

- Français en 1ère L : écrit coefficient 3 , oral coefficient 2.

Note d'écrit : 9

Note d'oral : 12

Moyenne pondérée : $\dfrac{3x3 + 2x12}{5} = 10{,}2$

2) Barycentre de 2 points :

Théorème et définition : Etant donnés que deux points A et B et 2 réel α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

G est appelé barycentre des points A et B affecté respectivement des coefficients α et β.

(ou aussi G barycentre des point pondérés (A, α) et (B, β))

Démonstration :

$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ \alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ \beta\,\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{AG}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$

Cette dernière relation montre qu'il existe un unique point G la vérifiant.

Exemple de construction :

- $\alpha = \beta = 1$
  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  G milieu de [AB]
- G barycentre de (A,-2) et (B,3)
  -2$\overrightarrow{GA}$+3$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  ⇔-2($\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}$)+3$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  ⇔ $\overrightarrow{GB}$ =-2$\overrightarrow{BA} = \vec{0}$
  ⇔ $\overrightarrow{BG}$ =2$\overrightarrow{AB}$

Propriétés :

- G est situé sur la droite (AB).
  α et β sont de même signe : G est entre A et B.
  α et β sont de même signes contraires : G est à l'extérieur de [AB].
- G est un inchangé si l'on divise ou multiplie les coefficients par un même réel non nul
  Exemple : (A,10) (B,30)
  10$\overrightarrow{GA}$+30$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  ⇔ $\overrightarrow{GA}$+3$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  Si les coefficients sont égaux, G milieu.
- Coordonnées de G
  Exemple : A(1,0,2) B(-2,1,3)
  G barycentre de {(A,2) ; (B,3)}
  2$\overrightarrow{GA}$+3$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
  5$\overrightarrow{GA}$+3$\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x-0 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}$

1ère **méthode :** établir $\overrightarrow{AG}\ \frac{3}{5}\ \overrightarrow{AB}$ puis passage aux coordonnées.

2ème **méthode :** 2$\overrightarrow{GA}$+3$\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_a - x_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$

2 fois les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$ + 3 fois celle de $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

3ème **méthode :** on introduit l'origine 0.

$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})=\vec{0}$

$2\,2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{OG}$

$$\frac{2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{OB}}{5}=\overrightarrow{OG}$$

$$\begin{cases} x_g = \dfrac{x_a+3x_b}{5} \\ y_g = ... \\ z_g = ... \end{cases}$$

➔ Moyenne pondérée.

Les coordonnées de G sont les moyennes pondérées de A et B par les coefficients 2 et 3 .
Application :
M point quelconque.

$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}$

$=\alpha\,(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$

$=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}$

On a la formule de réduction :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

3) Barycentre de 3 points (ou plus) :

a) Définition :

Théorême et définition : Etant donnés trois points A,B,C et 3 réels α, β et γ tel que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G est le barycentre des points A,B,C affectés respectivement des coefficients α,β,γ (ou des points pondérés (A, α) ;(B, β) ;(C, γ)

Démonstration : $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\gamma\,(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{AB}+\gamma\,\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \beta\,\overrightarrow{AB}+\gamma\,\overrightarrow{AC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Ce qui détermine un unique G.

B) Propriétés :

- ✓ Si A,B,C déterminent un plan, G appartient à ce plan
- ✓ G est inchangé si l'on multiplie ou divise les coefficients par un même réel non nul.

Conséquence :
Lorsque $\alpha = \beta = \gamma$ on peut donc se ramener à tous les coefficients égaux à 1.
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, G est le centre de gravité de ABC.

<u>Coordonnées de G :</u>

$\alpha\ \overrightarrow{GA}\ \overrightarrow{GA}\ \beta\ \overrightarrow{GB} + \gamma\ \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\alpha \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + \beta(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$

$(\Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{OG}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$\begin{cases} x_g = \dfrac{\alpha\ x_a + \beta x_b + \gamma x_c}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_g = \ldots\ldots \\ z_g = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

= moyenne pondérée.

b) Théorème d'associativité.

Ex : {(A,3) ;(B,-1) ;(C,-1)}