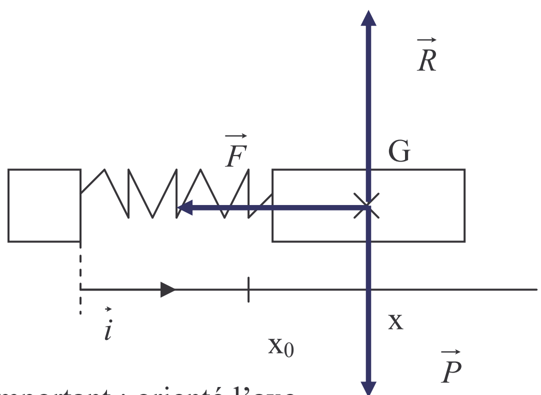
Résolution d'Equations Différentielles en Physique :

Durant tout ce cours, on prendra référence l'annale de Physique, page 295. J'ai choisit cet exemple car il me semble le plus complet.

1. Mais comment on trouve une équation différentielle ?

Ici, par contre, on ne prend pas comme exemple l'annale.
Comment on trouve l'équation différentielle : cela revient un peu au début de la méthode d'Euler :

Tout d'abord, on fait l'inventaire des forces agissant sur le système : Ici, on prend l'exemple d'un ressort sur support horizontal (l'échelle des forces n'est pas respectée) : On considère le système sans frottements :



Important : orienté l'axe.
x_0 représente la longueur du ressort au repos.
x représente la longueur du ressort à un instant t.
$\vec{F}$ est la force de rappel, $\vec{R}$ la réaction du sol (elle est perpendiculaire à ce dernier puisqu'on néglige les frottements) et $\vec{P}$ le poids de l'objet.

On écrit alors la relation selon la deuxième lois de Newton :
$\vec{P}+\vec{R}-\vec{F}=m\vec{a}$ (Attention au signe (axe orienté))
Maintenant, on projette sur l'axe, c'est-à-dire qu'on tient compte uniquement de ce qui se passe sur l'axe $\vec{i}$:
0+0 – kx = $m\vec{a}$ car , F = kx ou -kx$\vec{i}$

Ensuite, comme on cherche une équation différentielle, on remplace $\vec{a}$:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$0 = m\frac{dx^2}{dt^2}+kx$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{k}{m}x = 0$$

On peut aussi l'écrire :
$\ddot{x} + \omega_0 x = 0$

Et voilà donc notre équation différentielle.

2. Méthode (sans exemple)

Cette fois ci, on reprend une autre équation :
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0$ (1)
Dans tous les cas, on nous donne la solution type. A nous de vérifier que c'est bien solution :
Ici la solution est :
$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$ (2)

On vérifie que c'est solution :

Principe :
Que ce soit dans n'importe quelle équation différentielle le principe est le suivant :
On remplace les valeurs voulues dans les équations de départ. Ici, on remplacera dans l'équation une toutes les valeurs de x par l'expression de x donnée dans la relation (2).
Mais pour remplacer, il faut dérivé la fonction (2) deux fois. En effet, si on veut remplacer tous les x dans l'équation (1) on voit que un « x » est dérivée deux fois, donc on fait de même.
Le but étant de trouver en général les constantes : A, ϕ, ω_0

On trouve :
$\ddot{x} = -A.\omega_0{}^2.\cos(\omega_0 t + \phi)$
Attention, on dérive selon « t ».
On peut donc remplacer tous les x de l'expression (1) :

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0$

$\Leftrightarrow\ -m.\left(A.\omega_0{}^2.\cos(\omega_0 t + \phi)\right) + 2k\left(A.\cos(\omega_0 t + \phi)\right) = 0$ J'ai mis entre parenthèse pour bien voir ce qu'on a remplacé

$\Leftrightarrow\ \left(A.\omega_0{}^2.\cos(\omega_0 t + \phi)\right)\left(-m\omega_0^2 + 2k\right) = 0$ La, on a factoriser au maximum.

A.B = 0 si A =0 ou B=0 . Or, ici, il paraît évident que seul la première parenthèse peut être égale à 0. Et si cela n'est pas évident, il suffit de voir ce que l'on cherche : ici on cherche à connaître l'expression de ω_0 ! Donc :

$\left(-m\omega_0^2 + 2k\right) = 0$ Maintenant, on résout simplement

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ On trouve alors la constante rechercher dans l'exercice.

Maintenant, c'est bien beau, mais, quelle valeurs ont : A et ϕ ?
Pour ça, une seule solution, les conditions initiales.

Détermination de ϕ :

Ici, on sait qu'à t=0, et x=0 (logique d'ailleurs) :
On remplace simplement dans (2) x par 0 et t par 0 :

$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$

$\Leftrightarrow\ 0 = A.\cos(0 + \phi)$

$\Leftrightarrow\ 0 = A.\cos(\phi)$

Donc :

$\phi = \frac{\pi}{2}$ (mod 2 π) .

Note : on peut aussi mettre $\phi = -\frac{\pi}{2}$, mais ça n'a que peu d'intérêts.

Détermination de A :
On sait aussi qu'à t=0, x=0, v=0.
On sait que la vitesse est égale à la dérivée de la position :

V= $\frac{dx}{dt}$

On dérive donc la relation (2) et on trouve :

$\dot{x} = -A.\omega_0.\sin(\omega_0 t + \phi)$

Donc, comme on sait qu'à t = 0 et v = 1,5 m/s et x =0 :

$- A.\omega_0.\sin(\omega_0.0 + \frac{\pi}{2}) = v(0)$

$\Leftrightarrow\ - A.\omega_0.\sin(\frac{\pi}{2}) = v(0)$

$\Leftrightarrow\ - A.\omega_0 = v(0)$

Maintenant on remplace ω_0 et on exprime A :

$A = \frac{-v(0)}{2\pi} T_0$

Et là, on regarde l'exo, et on a toutes les valeurs.

En résumé :
Pour résoudre une équation différentielle :

- On dérive sa solution autant de fois que voulu
- On remplace dans l'équation différentielle par la solution
- On factorise la maximum
- On utilise le fait que A.B = 0 si A = 0 ou B = 0 et on isole ce qu'on veut.
- On trouve la première constante : T_0 ou w_0
- On utilise les conditions initiales pour trouve ϕ
- On utilise une autre condition initiale pour trouver A.

<u>C'est toujours la même chose, et c'est toujours la même chose qui est demandé.</u>

Note importante, toujours demandé :
A : représente l'amplitude
ϕ : représente le déphasage
ω_0 *ou* T_0 : représente la période propre